Il continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede (¹).

Memoria del Corrispondente GIUSEPPE VERONESE

letta nella seduta del 21 dicembre 1890.

Nei miei studi sui fondamenti della geometria a quante si vogliano dimensioni, che saranno presto pubblicati, ho dovuto occuparmi anche del continuo (²). È noto che il sig. O. Stolz ha rilevato l'importanza dell'assioma V della celebre opera di Archimede « De sphaera et cylindro » (³). Dati due segmenti rettilinei A è B, $A < B$, secondo questo assioma o meglio per l'uso che ne fece Archimede, vi è sempre un numero intero finito n tale che $A.n > B$. Il sig. Stolz ha creduto che dal principio del continuo si potesse dedurre questa proprietà (⁴); ma specialmente dopo la considerazione di nuovi infiniti e infinitesimi attuali che pur soddisfano ai miei principî I-V sul continuo mi sono persuaso che non si può dedurre l'assioma suddetto dal principio della continuità se in qualche modo non è contenuto in questo principio stesso. La definizione del continuo del sig. Stolz (⁵) suppone implicitamente l'assioma d'Archimede, e la sua dimostrazione di questa proprietà è quindi inutile (⁶).

Lo scopo della presente Nota è dunque di far risaltare il posto che occupa l'assioma d'Archimede tra i principî del continuo rettilineo, e di dedurre alcune proprietà importanti che sono assunte comunemente come assiomi, senza ammetterne di nuove. Aggiungo però subito che la via qui seguita non è quella per la quale io giungo nei miei studî sopra citati a questi principî, specialmente ai due primi, poichè secondo me la matematica pura non è nei suoi fondamenti una combinazione arbitraria di segni ma è una scienza di concetti che scaturiscono direttamente dagli assiomi logici, da

(¹) Per continuo rettilineo intendo quel continuo astratto le cui proprietà fondamentali sono date da quelle della retta, indipendentemente dalla sua determinazione per mezzo di una coppia di punti. Questa nota è l'estratto di uno scritto inviato nel giugno u. s. al prof. O. Stolz. Egli mi ha poi gentilmente comunicati alcuni teoremi i quali chiariscono e completano le sue ricerche in proposito, e che come egli mi scrisse saranno pubblicati nei Math. Annalen.

(²) A questi studî ho accennato anche nella mia Memoria: *Sulla superficie omaloide normale a due dimensioni del 4º ordine nello spazio a cinque dimensioni*, ecc. (Atti di questa Accad. 1884).

(³) Math. Annalen, vol. 22. *Zur Geometrie der Alten insbesondere über ein Axiom des Archimedes.*

(⁴) Math. Annalen. l. c., vol. 31 pag. 608 e *Vorlesungen ü. Allg. Arith.* Vol. 1. pag. 69-83.

(⁵) *Vorl. ü. Allg. Arith.* pag. 82-83.

(⁶) Così è più manifestamente della dimostrazione del sig. Killing (*Ueber die Nicht-Eucl. Raumformen*, pag. 46-47. Leipzig, 1885). Vedi le note (1) pag. 12 e 13.

operazioni mentali comuni a senso determinato ed unico e dall'esame del continuo intuitivo nella sua forma più semplice [1].

Non esamino qui se tutti i termini che adopero sono definibili o no; per lo scopo che mi propongo un tale esame sarebbe superfluo.

1. Princ. I.

(1) Se A e B sono oggetti qualunque (*grandezze*) di un sistema dato Σ, si ha una ed una sola delle relazioni:

$A = B$ (A *uguale* a B), $A > B$ (A *maggiore* di B), $A < B$ (A *minore* di B) o anche

(1′) $B = A$, $B < A$ $B > A$

e vi è almeno un oggetto nel sistema uguale ad un oggetto qualunque dato di Σ. Si ha pure:

(2) se $A = B$, $B = C$ è $A = C$

(3) " $A = B$, $B > C$ è $A > C$.

a) *Se* $A = B$, $B < C$ *è* $A < C$.

È $A >$ o $< C$ (II_2, I_1). Se essendo $A = B$ fosse $A > C$ sarebbe $B > C$ ($I_{1'}$, I_3) contro I_1.

b) *Se A è una grandezza qualunque di* Σ *è* $A = A$.

Vi è almeno una grandezza B di Σ uguale ad A (I_1). Se fosse $A \gtrless A$ sarebbe $B \gtrless A$ (I_3, *a*) contro I_1.

Oss. I. Relativamente ai segni $=$, $>$ e $<$ non si tien conto dunque che A e B sono in (2) e (3) oggetti distinti, se non indicano un solo oggetto, vale a dire che essi hanno, come io dico, una *posizione diversa.*

Princ. II.

(1) Se A e B sono oggetti qualunque del sistema Σ, il segno $A + B$ indica uno ed un solo oggetto del sistema, e si ha:

(2) $$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

(3) $$A + B > A, \quad A + B > B.$$

Se è $A < B$, vi sono in Σ oggetti X e X′ tali che

(4) $$A + X = B$$

(5) $$X' + A = B \text{ [2]}$$

(6) Se $A = A'$, $B = B'$ si ha: $A + B = A' + B = A + B'$, e perciò $= A' + B'$.

Oss II. Quest'ultima relazione significa che non si tien conto delle relazioni di posizione tra A e A′ insieme con B e con B′.

2. Def. I. L'operazione caratterizzata dal segno $+$ si chiama *addizione* di B ad A; il risultato di essa si dice *somma* di B ad A.

Ind. I si scrive $A = B - X$. L'operazione indicata dal segno $-$ si chiama *sottrazione* di X da B, e A *differenza* o *resto* di X da B. Si scrive anche $X = -A + B$.

Def. II. Si chiama $A + B$ *tutto*, A, B le sue *parti*. Le parti di A e B, se ne hanno, si chiamano pure *parti* di $A + B$.

[1] Nei nostri studi suddetti ci occupiamo anche della possibilità e dell'indipendenza delle nostre ipotesi.

[2] Stolz ammette con un postulato la legge commutativa della somma; così pure ammette che la (4) e quindi anche per la legge commutativa la (5) siano soddisfatte da un solo oggetto X. (Vedi le note (2) pag. 17 e (1) pag. 21.

a) *In* $A + B + C$ *si possono sostituire* A, B, C *con grandezze uguali rispettivamente* A', B', C' (II_6, II_2 *e* I_2).

b) *Se* $A + B = C$ *si ha* A e $B < C$.

Difatti se fosse ad es: $A > C$ sarebbe anche $A > A + B$ (I_3, $I_{1'}$), il che è assurdo (II_3, $I_{1'}$ e I_1).

c) *Se* $B > C$ *si ha* $A + B > A + C$.

Difatti $B = C + X (II_4)$ dunque $A + (C + X) = A + B (II_6)$, oppure $= (A + C) + X (II)$, quindi $(A + C) + X > A + C$ (II_3), e per conseguenza $A + B > A + C$ (I_3).

c') *Se* $A + B > A + C$ *si ha* $B > C$.

Se fosse $B \overline{\gtrless} C$ sarebbe $A + B \overline{\gtrless} A + C$ (II_6; *c* e $I_{1'}$), ciò che è assurdo (I_1).

d) *Se* $B > C$ *è* $B + A > C + A$.

Si ha $B + A = C + (X + A)$ (II_4, II_6 e II_2), e ponendo $X + A = D$ (II_1) si ha: $B + A = C + D$ (II_6). Ma $D > A$ (b, $I_{1'}$), dunque $C + D > C + A$ (c); ossia $C + (X + A) > C + A$ (II_6, I_3), $(C + X) + A > C + A$ (II_2, I_3) o ancora $B + A > C + A$ (II_6 e I_3).

d') *Se* $B + A > C + A$ *è* $B > C$.

Dim. analoga a quella di c').

Def. III. La somma di A ad A considerata n volte è ciò che si chiama *multiplo* di A secondo il numero n; e si indica con $A.n$, o An; A è *summultiplo* di $A.n$ secondo il numero n; e si scrive $A.n = B$, $A = \frac{B}{n} = B.\frac{1}{n}$.

e) *Se* $\frac{B}{n}$ *è multiplo di un'altra grandezza di* Σ *secondo il numero* n', *si ha:*

$$\frac{B}{n} \cdot \frac{1}{n'} = \frac{B}{nn'}.$$

Perchè B è multiplo della grandezza data secondo il numero nn' (def. III).

Oss. I. Noi supponiamo qui conosciute le leggi della somma dei numeri interi della classe $123 \ldots n \ldots$, e la definizione della moltiplicazione, e quando parleremo di numeri senz'altro intenderemo numeri di questa classe. Per la proprietà e) non occorre alcun postulato poichè non si suppone che ogni grandezza del sistema Σ sia multipla di un'altra grandezza di Σ secondo un numero dato qualsiasi [1].

f) *Se* $A < B$ *vi è un solo oggetto* X *tale che* $X + A = B$.

Difatti se oltre X tale che $X + A = B$ (II_5) vi fosse $X' \gtrless X$ tale che $X' + A = B$, sarebbe $X' + A \gtrless X + A$ (d, $I_{1'}$), e quindi $B \gtrless B$ ($I_{1'}$, I_3 e a, 1), ciò che è assurdo (I_1).

Ind. II. Se $B = A$ si pone $X = 0$, e per non fare distinzioni dannose alla generalità dei teoremi e delle dimostrazioni si chiama X *grandezza nulla* o *zero*. Questa parola significa soltanto l'assenza di ciascuno degli oggetti primitivi dati.

f') $0 + A = A$, $-0 + A = A$, $0 = A - A$ (f; I_2, ind. I e II).

f'') $A + (-A + B) = A - A + B = B$.

Ponendo $C = -A + B$ si ha $A + C = B$ (ind. I), dunque $A + (-A + B) = B$ (II_6).

[1] Non è escluso che siano possibili altri numeri non finiti tali che si possa definire il multiplo $A.\eta$ della grandezza A in modo da soddisfare ai nostri principi. Vedi Princ. V e oss. III, n. 7.

Ma $A - A = 0$ e $0 + B = B$ ($I_{1'}$; f), dunque $A - A + B = B$ (II_6), e perciò anche $A + (- A + B) = A - A + B$ (I_2).

g) *Se* $A < B$ *vi è in* Σ *un solo oggetto* X *tale che* $A + X = B$.

Se oltre X tale che $A + X = B$ (II_4), vi fosse $X' \gtrless X$ tale che $A + X' = B$, sarebbe $A + X' \gtrless A + X$ (c, $I_{1'}$), dunque $B \gtrless B$ (I_3 e a, 1), ciò che è assurdo (I_1).

g') $A = A + 0$, $A - 0 = A$, $0 = - A + A$.

Perchè se $A = B$ si ha anche qui $X = 0$ (g; I_2, $I_{1'}$, ind. II, ind. I).

h) *Se* $X = X'$, $Y = Y'$, $Y > X$ *si ha* $Y - X = Y - X' = Y' - X = Y' - X'$.

Ponendo $Y - X = C$, $Y - X' = C'$ si ha $Y = C + X$, $Y = C' + X'$ (II_5, ind. I), dunque $C + X = C' + X'$ (I_2). Ma se fosse $Y - X < Y - X'$ si avrebbe $C < C'$ ($I_{1'}$, I_3 e a, 1), dunque anche $C + X < C' + X'$ (d, $I_{1'}$, II_6 e I_3), il che è assurdo (I_1). Nello stesso modo si dimostrano le altre uguaglianze tenendo conto delle relazioni II_6 e I_2.

i) *Se* $X = X'$, $Y = Y'$, $Y > X$ *si ha* $-X + Y = -X + Y' = -X' + Y = -X' + Y'$.

Ponendo $- X + Y = C_1$, $- X' + Y' = C'_1$ si ha $Y = X + C_1$, $Y = X' + C'_1$ (II_4, ind. I), e con ragionamento analogo al precedente si dimostra $-X + Y = -X' + Y$. Nello stesso modo si dimostrano le altre uguaglianze tenendo conto delle relazioni II_6 e I_2.

l) *Se* $X < Y < Z$ *si ha* $Y - X < Z - X$.

Perchè se $Y - X = A$, $Z - X = B$, vale a dire $Y = A + X$, $Z = B + X$ ($I_{1'}$, II_5, ind. I) si ha $A + X < B + X$ ($I_{1'}$, a, 1, I_3), oppure $A < B$ (d' e $I_{1'}$).

l') *Se* $Y - X < Z - X$ *si ha* $Y < Z$.

Perchè se fosse $Y \geqq Z$ sarebbe anche $Y - X \geqq Z - X$ (h e l, $I_{1'}$), il che è assurdo (I_1).

m) *Se* $X < Y < Z$ *si ha* $- X + Y < - X + Z$.

Ponendo $- X + Y = A_1$, $- X + Z = B_1$ si ha $X + A_1 = Y$, $X + B_1 = Z$ ($I_{1'}$, II_4, ind. I), e quindi $X + A_1 < X + B_1$ (a, 1, I_3 e $I_{1'}$), ossia $A_1 < B_1$ (c' e $I_{1'}$), e perciò anche $- X + Y < - X + Z$ (a, 1, I_3, $I_{1'}$).

m') *Se* $- X + Y < - X + Z$ *si ha* $Y < Z$.

Perchè se fosse $Y \geqq Z$ sarebbe $- X + Y \geqq - X + Z$ (i, m, $I_{1'}$) ciò che è assurdo (I_1).

n) *Se* $X < Y < Z$ *si ha* $Z - Y < Z - X$.

Sia $Z - Y = A$, $Z - X = B$ si ha $Z = A + Y$, $Z = B + X$ ($I_{1'}$, II_5 e ind. I), dunque $A + Y = B + X$ (I_2). Ma $Y = Y' + X$ ($I_{1'}$ e II_5), dunque $(A + Y') + X = B + X = D$ (II_6, II_2 e II_1) da cui $A + Y' = B$ (f), e per conseguenza $A < B$ (b) ed anche $Z - Y < Z - X$ (a, 1, I_3, $I_{1'}$).

n') *Se* $Z - Y < Z - X$ *si ha* $Y > X$.

Se si avesse $Y \leqq X$ si avrebbe pure $Z - Y \geqq Z - X$ (h, n e $I_{1'}$), ciò che è assurdo (I_1).

o) *Se* $X < Y < Z$ *si ha* $- Y + Z < - X + Z$.

Ponendo $- Y + Z = A_1$, $- X + Z = B_1$ oppure $Y + A_1 = Z$, $X + B_1 = Z$ ($I_{1'}$, II_4, ind. I) si ha $Y + A_1 = X + B_1$ (I_2). Ma $Y = X + Y''$ ($I_{1'}$, II_4), dunque $X + (Y'' + A_1) = X + B_1$ (II_6, II_2), ovvero $Y'' + A_1 = B_1$ (f), e per conseguenza $A_1 < B_1$ (b), e perciò anche $- Y + Z < - X + Z$ (a, 1, I_3, $I_{1'}$).

o′) *Se* $-Y+Z<-X+Z$ *si ha* $Y>X$.

Se fosse $Y \leqq X$ sarebbe $-Y+Z \geqq -X+Z$ (i e o), il che è assurdo (I_1).

p) *Se* $Y-X=Y-X'$ *o* $Y-X=Y'-X$ *si ha* $X=X'$ *o* $Y=Y'$.

Perchè se ad es: nel primo caso fosse $X \lessgtr X'$ sarebbe anche $Y-X \gtrless Y-X$ (n e $I_{1'}$) contro l'ipotesi (I_1).

q) *Se* $-X+Y=-X'+Y$ *o* $-X+Y=X+Y'$ *si ha* $X=X'$ *o* $Y=Y'$.

Perchè se ad es: nel primo caso $X \lessgtr X'$ si avrebbe $-X+Y \gtrless -X'+Y$ (o) contro l'ipotesi (I_1).

r) *Se* $A>B$, $B>C$ *è* $A>C$.

Difatti $A=B+X$, $B=C+Y$ (II_4); $A=(C+Y)+X=C+(Y+X)$ (II_2, II_6); ma $C+(Y+X)>C$ (II_3) dunque $A>C$ ($I_{1'}$ e II_3).

r′) *Se* $A<B$, $B<C$ *si ha* $A<C$ (r e $I_{1'}$).

r″) *Se* $B>D$ *e* X *é una grandezza qualunque di* Σ *si ha* $X+B>D$, $B+X>D$.

Difatti $B+X>B$ (II_3) dunque $B+X>D$ (r). Così è $X+B>D$ (II_3 e r).

s) *Se* $Z>X$ *e* $<Y$; $W>X$ *e* $<Y$; $W>Z$, *si ha* $-Z+W<-X+Y$.

Difatti $-Z+Y<-X+Y$ (r', o); ma $W<Y$ dunque $-Z+W<-Z+Y$ (m), e perciò $-Z+W<-X+Y$ (r').

t) *Se* $A>C$ e $B>D$ *si ha* $A+B>C+D$.

Si ha $A=X+C$ (II_5), dunque $A+B=(X+C)+B=X+(C+B)$ (II_6 e II_2). Ma $C+B>C+D$ (c), e quindi anche $X+(C+B)>C+D$ (r''), dunque: $A+B>C+D$ (I_3).

t′) *Se* $B+C=B'+C'$ *e* $B<B'$, *o* $C>C'$, *si ha* $C>C'$, *o* $B<B'$.

Se fosse nel primo caso $C \leqq C'$ sarebbe $B+C<B'+C'$ (II_6, d o t, $I_{1'}$) il che è assurdo (I_1). Così nel secondo caso.

Def. IV. Se $A<B$, $B<C$ diremo che B è *compresa fra* A e C.

u) *Se* $A \lesseqgtr B$ *si ha* $A.n \lesseqgtr B.n$.

Se $n=2$, si ha $A+A \lesseqgtr A+B$ (c, II_6 e $I_{1'}$). Ma $A+B \lesseqgtr B+B$ (d, II_6 e $I_{1'}$), dunque $A+A \lesseqgtr B+B$ (r, r'). Ammettendo il teorema per $n-1$ lo si dimostra per n (c, d, II_6 e $I_{1'}$, r e r'); ma vale per $n=2$ dunque vale in generale (oss. III).

u′) *Se* $A.n \lesseqgtr B.n$ *si ha* $A \lesseqgtr B$.

Se $A.n=B.n$ e fosse $A \gtrless B$ sarebbe anche $A.n \gtrless B.n$ (u), contro I_1, dunque $A=B$. Se è $A.n<B.n$ e fosse $A \geqq B$, sarebbe anche $A.n \geqq B.n$ (u) contro I_1, dunque $A<B$ (I_1). Similmente, se $A.n>B.n$ si ha $A>B$.

v) *Nel sistema* Σ *non vi è alcuna grandezza maggiore delle altre.*

Infatti se X è una grandezza data qualunque e A è un'altra grandezza di Σ si ha $X+A>X$ (II_3).

w) *Data una grandezza qualunque* X, *vi sono grandezze* Y *e* Z *tali che* $X=-Y+Z$.

Difatti vi sono sempre in Σ grandezze Z maggiori di X (v), e quindi anche grandezze Y tali che $X=-Y+Z$ (II_5, ind. I).

3. Def. I. Se si considerano le grandezze del sistema Σ come già date e disposte in serie in modo che quelle che seguono una grandezza qualunque siano maggiori di

essa, il sistema si chiama *sistema omogeneo a una dimensione*, e l'ordine della serie si chiama *verso* o *direzione* del sistema [1].

Oss. I. La prima grandezza di Σ è evidentemente O, considerandola come appartenente al sistema, perchè è la più piccola. Si ha dunque la serie

O . . . A . . . B . . . C . . . X . . . Y . . . Z . . .

$0 < \ldots < A < \ldots < B < \ldots < C < \ldots < X < \ldots < Y < \ldots < Z < \ldots$

Def. II. Le grandezze del sistema Σ comprese fra due grandezze qualunque X e Y ($X < Y$) (def. IV, 2) formano un altro sistema a una dimensione (def. I) che chiamo *parte* o *intervallo* del sistema Σ, e che indico col simbolo (XY). Il verso di un intervallo è il verso del sistema [2].

Oss. II. Gli intervalli (OA), (OB), (OC) ecc., corrispondono a senso unico, reciprocamente e nel medesimo ordine alle grandezze A, B, C ecc., in modo che noi possiamo sostituire l'intervallo alla grandezza corrispondente, e reciprocamente. Così gli intervalli (XY), (XZ) ecc., corrispondono nello stesso modo alle grandezze $-X+Y$, $-X+Z$ ecc. [3].

a) *Se* $-X+Y=Z$ *si ha* $(XY)=(OZ)$.

Perchè $-X+Y=-O+Z$ (f′, 2, I_2 e def. I).

Def. III. Gli oggetti X, Y si chiamano *elementi estremi* o *limiti* dell'intervallo (XY), di modo che si ottiene la serie di elementi

$$O \ldots A \ldots B \ldots C \ldots X \ldots Y \ldots Z \ldots$$

Def. IV. Gli elementi degli intervalli (OZ) che rappresentano delle grandezze Z comprese fra X e Y si dicono elementi *intermedî* o *compresi* fra gli elementi X e Y nel sistema Σ.

Oss. III. Osserviamo che due intervalli uguali come le grandezze che rappresentano possono sostituirsi uno all'altro in tutte le relazioni precedenti, ad es: se si ha $(AB)+(CD)=(EF)$ e $(AB)=(A'B')$, si ha pure $(A'B')+(CD)=(EF)$ (II_1, ind. I, 2, II_6 e def. II).

Def. V. Se $(AB)=(AC)$ significa che $-A+B=-A+C$ (def. II), e quindi $B=C$ (q, 2). Diremo perciò che gli elementi B e C *coincidono*.

Def. VI. Un intervallo (ZW) dicesi *contenuto* in un intervallo qualunque (XY) se gli elementi del primo (non eccettuati gli estremi) sono elementi del secondo; e dicesi *parte* di (XY) se (ZW) è contenuto in (XY) e non tutti gli elementi di (XY) sono elementi di (ZW).

b) *Una parte di un intervallo è minore dell'intervallo stesso* (def. II, def. VI; m, opp. o, opp. s, 2).

(1) Noi ammettiamo qui l'idea di serie e dell'ordine di essa, ma nei nostri studî sopra citati sottomettiamo questa idea fondamentale a una discussione particolareggiata. Nè in questo concetto nè nelle proprietà che ne derivano sono contenuti i teoremi che daremo nelle pagine seguenti, perchè si possono immaginare delle serie che non soddisfano a tutte le proprietà enunciate, ad es. alla proprietà II_6 e alla seconda delle II_8.

(2) Anche questa proprietà è dimostrabile (vedi nota precedente).

(3) La corrispondenza univoca e dello stesso ordine è pure un concetto fondamentale che svolgo nei suddetti studî ancora prima della teoria del numero intero. Qui suppongo conosciuto il teorema del resto semplicissimo, che se due gruppi di elementi corrispondono univocamente e nel medesimo ordine ad un terzo gruppo si corrispondono univocamente e nello stesso ordine fra loro.

c) *Se* (XY) *è contenuto in* (XZ) *si ha* $(XY)+(YZ)=(XZ)$.

Difatti è $-X+Y+(-Y+Z)=-X+Z$ (def. II e def. VI; f'', 2 e II_6).

Oss. IV. Come gli intervalli (OA), (OB) ecc., corrispondono alle grandezze A, B, ecc. (oss. II), i secondi estremi (def. III) corrispondono univocamente e nello stesso ordine alle stesse grandezze (def. I). Gli intervalli che rappresentano le grandezze comprese fra O e A e fra A e X, essendo X una grandezza qualunque di Σ maggiore di A, sono (OA) e (AX), che hanno l'elemento *comune* A. Ogni elemento che corrisponde ad una grandezza X del sistema compresa fra due grandezze Y e Z è compreso fra i due elementi che corrispondono a Y e Z, e appartiene all'intervallo (YZ) (def. II, IV).

Def. VII. Gli elementi che non appartengono ad un intervallo in Σ sono *esterni* all'intervallo, gli altri (quelli cioè che appartengono all'intervallo) tranne gli estremi, si dicono *interni*.

Oss. V. Dalla def. III e dalla def. VI e dalla serie di grandezze di Σ risultano tosto le proprietà degli elementi rispetto al loro ordine nel sistema, le quali esprimono in altre parole le proprietà già trovate per le grandezze, specialmente i teor. r e r'. In seguito citeremo nelle dimostrazioni queste proprietà anzichè quelle corrispondenti agli elementi o agli intervalli (1).

Def. VIII. Due intervalli (XY), (YZ) qualunque di Σ con un estremo comune Y si chiamano *consecutivi* nel verso del sistema (def. I), o semplicemente *consecutivi* quando si considera Σ in un solo verso (vedi def. IX e oss. VI).

Def. IX. Se consideriamo gli elementi del sistema Σ in un altro ordine in modo che quelli che precedono in Σ un dato elemento lo seguano nel nuovo ordine, si ottiene un altro sistema Σ' che si chiama *opposto* a Σ.

Oss. VI. Evidentemente Σ è opposto a Σ'. Si può considerare la coppia di due sistemi opposti Σ e Σ' come un solo sistema; in tal caso il sistema ha due versi opposti. Ad es. una retta ha due direzioni, e se la si considera in una sola direzione si ha un raggio di essa; la retta è dunque data da due raggi di direzione opposta. Ad es. il raggio limitato ad un punto O rappresenta intuitivamente il sistema Σ, senza però che le proprietà del raggio rettilineo siano necessariamente anche proprietà di Σ.

Oss. VII. Date due grandezze qualunque A e B esiste sempre in Σ la grandezza $A+B=C$ (II_1) da cui $-A+C=B$ (ind I, 2); ciò significa che nel sistema Σ, se A è l'elemento che rappresenta la grandezza A, vi è un intervallo (AC) che rappresenta la grandezza B. Dunque il principio II_1 pel sistema omogeneo si enuncia anche così:

II'_1. Nel sistema omogeneo ad una dimensione Σ, dato un elemento qualunque A di esso, vi è uno ed un solo intervallo (AC) uguale ad un intervallo dato qualunque di Σ nel verso del sistema.

Oss. VIII. Ma date due grandezze B e A qualunque di Σ tali che $A<B$, vi è sempre una sola grandezza X tale che $X+A=B$ (f, 2), e siccome $-X+B=A$

(1) Gli assiomi III, IV, V, VII e VIII dati dal sig. Pasch pei segmenti rettilinei (Vorl.. ü. neuee Geom. 1882) si deducono dalla proprietà I_1 (I_1'), e dai teor. r e r'. Il VI è conseguenza del teor. v del n. 1. Non bastano però i principî precedenti per dimostrare l'ass. II. La proprietà di questo assioma è ammessa dal nostro principio III, n. 4.

(ind. I, 2) si deduce *che nel sistema omogeneo ad una dimensione nell'intervallo* (OB) *vi è un intervallo uguale ad* (OA) *che ha per secondo estremo* B [1].

4. Princ. III. Nel sistema Σ non vi è un intervallo (grandezza) minimo se si esclude lo zero.

a) *In ogni intervallo* (AB) *vi sono elementi del sistema* Σ *oltre gli estremi.*

Perchè $-A+B$ non può essere la più piccola fra le grandezze del sistema (def. II, 3; III), dunque se è $E < -A+B$, fra A e B si ha la grandezza $A+E$ (II_3, $I_{1'}$, c, f'', 2) dunque a) (oss. IV, 3).

Def. I. La proposizione: Una serie di intervalli (grandezze) ad esempio: $(OA) < (OB) < (OC) < (OD) < \ldots$ che si considerano l'uno dopo l'altro nell'ordine che si seguono, è equivalente alla prop.: *Un'intervallo (grandezza) variabile i cui stati sono successivamente questi intervalli.* Così per gli elementi.

Un intervallo che non è variabile si chiama *costante.*

Oss. I. Gli intervalli o grandezze considerati fin qui sono *costanti.*

Def. II. La prop.: Una serie d' intervalli tale che ciascuno di essi sia maggiore o minore dei precedenti che si considerano nell'ordine della serie, equivale alla prop.: Un intervallo variabile è *crescente* o *decrescente;* oppure anche alla prop.: Un intervallo *diventa maggiore* o *minore degli stati precedenti* (def. I).

Se non vi è nella serie nessun intervallo massimo o minimo si dice che la variabile è *sempre crescente* o *sempre decrescente.* In caso contrario si chiama *limitatamente* crescente o decrescente.

Def. III. La prop.: Un intervallo variabile che diventa più piccolo di ogni intervallo dato del sistema Σ, il che è possibile (III), equivale all'altra: Un intervallo variabile che diventa *indefinitamente piccolo.*

E se l'intervallo variabile diventa più grande di ogni intervallo dato di Σ, il che è pure possibile (v, 2), si dice che diventa *indefinitamente grande.*

Def. IV. La prop.: L'elemento X si *avvicina indefinitamente* a B equivale all'altra: L'intervallo (BX) (se $(OB) > (OX)$) oppure (XB) (se $(OX) > (OB)$) diventa indefinitamente piccolo (def. III). L'elemento B si chiama *limite* dell'elemento variabile X; e se A è compreso fra O e B (def. II, 2), (AB) si chiama intervallo *limite* dell'intervallo variabile (AX) [2].

b) *Se* Y *e* Z *sono due elementi di ogni stato d'un intervallo variabile* (XX') *che diventa indefinitamente piccolo, gli elementi* Y *e* Z *coincidono.*

(1) Parlando d'intervalli anzichè di grandezze si ha il vantaggio non piccolo di avere alcune rappresentazioni intuitive del sistema Σ, per es.: il raggio rettilineo; senza pertanto che l'intuizione debba entrare come elemento necessario nelle definizioni e nelle dimostrazioni. Ciò è poi necessario nei fondamenti della geometria poichè gli assiomi geometrici (che non bisogna confondere colle ipotesi astratte geometricamente possibili) devono esprimere proprietà semplici e intuitive, e il metodo geometrico propriamente detto, se si vuol conservare alla geometria il suo vero carattere, deve scaturire nei fondamenti dal processo costruttivo dell'intuizione spaziale, come farò vedere nel mio libro.

(2) In questa definizione introduciamo il linguaggio del movimento dei corpi, ma non il principio stesso, il quale, come dimostriamo nelle nostre ricerche sopra citate, non solo non è necessario ma è anzi dannoso nello studio dei fondamenti della geometria; mentre d'altra parte è necessario per le pratiche applicazioni di essa. Del resto si potrebbe far senza di queste espressioni se non vi fosse maggiore comodità di linguaggio.

Y e Z devono essere costanti (def. I) altrimenti vi sarebbe uno stato $(Y_1 Z_1)$ di (YZ) (def. I), e poichè (XX') deve diventare indefinitamente piccolo, in $(Y_1 Z_1)$ dovremmo avere degli elementi X e X' contro il dato.

Se Y e Z non coincidessero (XX') resterebbe maggiore dell'intervallo (YZ) o (ZY) contro la def. III.

Def. V. *Scomporre o dividere* un intervallo (AB) in n intervalli significa determinare n intervalli consecutivi (def. VIII, 3) (AA_1), $(A_1 A_2)$, ... $(A_{n-1} B)$ tali che $(AA_1)+(A_1 A_2)+\ldots+(A_{n-1} B)=(AB)$.

c) *Si può scomporre un intervallo dato qualsiasi in un numero n qualunque di intervalli.*

Difatti se si considera un intervallo $(AX_{n-1})<(AB)$, ciò che è possibile (III), si ha: $(AX_{n-1})+(X_{n-1}B)=(AB)$ $(c, 3)$. Ripetendo la stessa operazione per (AX_{n-1}), e così in tutto n volte, si ha $(\text{II}_2$ e $\text{II}_6)$:

$$(AX_1)+(X_1 X_2)+\ldots+(X_{n-1} B)=(AB).$$

d) *Essendo dato un intervallo (AB) e un numero n vi sono in Σ degli intervalli (AX) tali che $(AX)n<(AB)$, e intervalli (AX') tali che $(AX')n>(AB)$.*

Difatti se si ha $(AX_1)+(X_1 X_2)+\ldots+(X_{n-1} B)=(AB)$ (c), possiamo supporre che fra gli n intervalli in cui fu diviso (AB) ve ne sia uno più piccolo, perchè se sono tutti disuguali trascurando ogni intervallo maggiore di un altro degli n intervalli e ripetendo questa operazione al più per $n-1$ degli n intervalli, l'intervallo rimanente deve essere il più piccolo; oppure perchè se fossero tutti uguali o fossero uguali soltanto gli intervalli minori, tra i quali ad es. (AX_1), basterebbe dividere (AX_1) in due parti (AX_1') $(X_1'X_1)$ (def. V, e c) considerando come primo intervallo (AX_1') e $(X_1'X_2)$ come secondo intervallo. Se il più piccolo è dunque (AX_1) pei teor. c) e t) del n. 2 (oss. V, 3), quest'ultimo applicato $n-1$ volte, si ha $(AX_1)n<(AB)$.

Analogamente possiamo supporre che fra gli n intervalli nei quali è stato scomposto (AB) ve ne sia uno più grande.

Se il più grande degl' intervalli suddetti è $(X_{n-1} B)$ si dimostra applicando il teor. t) suddetto $n-1$ volte e poi il teor. d) del n. 1 che $(X_{n-1} B)n>(AB)$.

e) *Ogni intervallo dato (AB) di Σ è intervallo limite di due intervalli variabili l'uno sempre crescente l'altro sempre decrescente.*

Infatti scegliendo un intervallo $(AX_1)<(AB)$, il che è possibile (III); si può scegliere inoltre un elemento X compreso nell'intervallo $(X_1 B)$ distinto dagli estremi (a), e così di seguito. L'intervallo (XB) diventa più piccolo di ogni intervallo dato ε del sistema, perchè se l'intervallo $(B'B)$ in (XB) è uguale a ε (oss. VIII, 3), in $(B'B)$ possiamo scegliere un altro elemento distinto dagli estremi (a). Similmente dicasi se $(AX_1)>(AB)$, il che è possibile $(v, 2)$.

f) *Se gli elementi X e X' si avvicinano indefinitamente in verso opposto a un elemento A, l'intervallo (XX') diventa indefinitamente piccolo.*

Infatti si ha $(XX')=(XA)+(AX')$ $(c, 3)$, perchè A è per dato interno all'intervallo (XX') (def. VI e def. VII, 3). Se questo intervallo restasse maggiore di un intervallo dato ε, si potrebbero scegliere due intervalli $(Y_1 A)$, (AY_1') tali che $(Y_1 A)+(AY_1')=\varepsilon$ $(c;\ \text{II}'_1$ e oss. VIII, oss. III, 3). Ma in $(Y_1 A)$ e (AY_1') vi sono

per dato degli elementi X e X′ (def. III e II) ed in tal caso $(XX') < \varepsilon$; dunque è assurdo che (XX') sia sempre maggiore di ε (I_1).

g) *Se l'elemento X si avvicina indefinitamente a un elemento X', e X' nel medesimo verso a un elemento A, X si avvicina indefinitamente all'elemento A.*

Infatti X' è contenuto nell'intervallo (XA) (def. IV; def. IV, def. II, 3). Se (XA) non diventasse indefinitamente piccolo vi sarebbe un intervallo $(A'A)$ non contenente alcun elemento X' (def. III). Ma in $(A'A)$ vi è un elemento X' (def. III), e per conseguenza non vi sarebbe alcun elemento X nell'intervallo $(A'X')$, contro l'ipotesi.

h) *Se X e X' si avvicinano indefinitamente nello stesso verso all'elemento A, (XX') o $(X'X)$ diventa indefinitamente piccolo.*

Se (XX') o $(X'X)$ restasse superiore di un intervallo dato ε, (XA) o $(X'A)$ contenendo (XX') o $(X'X)$ resterebbe pure superiore a ε, contro il dato (def. IV, def. III).

i) *Se due intervalli diventano indefinitamente piccoli, la loro somma diventa pure indefinitamente piccola.*

Possiamo ritenere che i due intervalli abbiano un estremo comune, perchè anche se non lo avessero potremmo sostituire rispetto alla loro somma l'uno di essi mediante un intervallo uguale ad esso con un estremo comune coll'altro, senza alterare la somma (oss. III, 3). Siano dunque (XY), (YZ) i due intervalli, e sia dato un intervallo ε. Dividasi ε in due intervalli ε_1 e ε_2 (c). Per dato vi deve essere uno stato di $(XY) < \varepsilon_1$, e quando è $(XY) < \varepsilon_1$ vi deve essere uno stato di $(YZ) < \varepsilon_2$, perchè anche se per un intervallo $(XY) < \varepsilon_1$ (YZ) fosse maggiore di ε_1, (YZ) deve diventare pur esso minore di ε_2 (def. II e III), e in tal caso si avrà $(XY) + (YZ) < \varepsilon$ (t, $I_{1'}$, 2).

Princ. IV. S e l'intervallo (XX') i cui estremi sono sempre variabili in verso opposto diventa indefinitamente piccolo, esso contiene sempre un elemento Y di Σ distinto da X e X′. [1].

l) *L'intervallo (XX') i cui estremi sono variabili in verso opposto e che diventa indefinitamente piccolo, determina un solo elemento Y di Σ.*

Difatti se ve ne sono due distinti, ad es: Y e Z, si dimostra come pel teor. b) che Y e Z devono essere costanti (def. I); ma allora (XX') resterebbe maggiore dell'intervallo (YZ) o (ZY) contro l'ipotesi (def. III), dunque ve n'è uno solo (princ. IV).

Def. VI. Questo principio si chiama il principio o l'ipotesi del *limite*.

Oss. II. È questo principio che caratterizza la continuità del sistema omogeneo ad una dimensione.

[1] A me pare che questo principio si giustifichi intuitivamente meglio degli altri, anche di quello dato dal sig. Dedekind (Stetigkeit und Irr. Zahlen; Braunschweig 1872), del che bisogna tener gran conto nei fondamenti della geometria, i cui assiomi devono derivare dall'intuizione spaziale senza per questo trascurare tutte le ipotesi astratte possibili che non contraddicono a questi assiomi. Secondo me non è la divisione degli elementi di un intervallo (AB) in due gruppi (X) e (X') tali che si abbia sempre $(AX) < (AX')$ che ci conduce al postulato del continuo, ma bensì il fatto che (XX') diventa indefinitamente piccolo. Nel continuo assoluto (vedi def. VII) vi sono di queste divisioni senza che (XX') diventi indefinitamente piccolo e quindi senza che vi siano elementi Y che le determinano, almeno elementi che godano le stesse proprietà degli altri. Coll'assioma V d'Archimede si dimostra, come vedremo, il postulato di Dedekind (a, 5); come in questo postulato è contenuto in particolare l'assioma d'Archimede.

Princ. V. Se α e β sono due intervalli del sistema ed è $\alpha < \beta$ vi è sempre un simbolo di molteplicità (numero) η determinato tale che $\alpha.\eta > \beta$.

In altri termini dato α è possibile costruire con α il sistema Σ stesso, in modo che siano soddisfatti i principî precedenti.

Oss. III. Non è detto però in qual modo si debba eseguire la costruzione [1].

Def. VII. Il sistema Σ che soddisfa ai principî suddetti lo chiamiamo sistema omogeneo ad una dimensione *continuo assoluto.*

Def. VIII. Se il numero η è sempre della classe naturale 1 2 3...n... il principio V si chiama *assioma* V *d'Archimede.* In tal caso il sistema Σ si chiama *continuo ordinario.*

Oss. IV. *Nei numeri seguenti ci occuperemo soltanto del continuo ordinario.*

Oss. V. Il continuo ordinario Σ corrisponde al continuo intuitivo del raggio rettilineo.

m) *Se* $A < B$ *e* B *non è multiplo di* A *si ha un numero* m *tale che* $A.m < B < A(m+1)$.

Vi è sempre un numero n tale che $An > B$ (princ. V, def. VIII e oss. IV). Ora in $Am < B$ il numero m deve dunque essere almeno uguale a 1 e al più uguale a $n-1$. Essendovi dei numeri m tali che $Am < B$, ve ne deve essere uno pel quale $A(m+1) > B$, almeno quello pel quale $m+1 = n$.

5. a) *Dato l'intervallo variabile* (AX) *sempre crescente (crescente) e l'intervallo variabile* (AX') *decrescente (sempre decrescente) tale che* (AX) *sia sempre minore di ogni stato di* (AX'), *ed ogni intervallo* (AX) *minore degli stati di* (AX') *appartenga alla prima variabile (od ogni intervallo* (AX') *maggiore degli stati di* (AX) *appartenga alla seconda variabile), l'intervallo* (XX') *diventa indefinitamente piccolo.*

Che siano anzitutto possibili tali variabli risulta immediatamente dal teor. c) e dalle def. I e II del n. 3 e dal teor. v) del n. 2. Inoltre si vede che non può essere uno stato di (AX) intervallo limite (AL) della variabile (AX'). Se ciò fosse, siccome la variabile (AX) è sempre crescente, nell'intervallo (LL_1) determinato da due stati successivi (AL) e (AL_1) di essa, vi sarebbero elementi X', perchè (LX') deve diventare per ipotesi più piccolo di ogni intervallo dato (LL_1) (def. IV, 3), e avremmo uno stato (AL_1) della variabile (AX) maggiore di uno stato della variabile (AX') contro il dato del teorema.

Ora supponiamo che sia sempre

$$(XX') > (BC) \tag{1}$$

essendo (BC) un intervallo finito dato; e per meglio fissare le idee supponiamo che nell'intervallo (XX') sia contenuto sempre un intervallo dato uguale a (BC) in modo

[1] Ciò non ha luogo pei numeri transfiniti di G. Cantor perchè per essi non ha sempre luogo la seconda delle proprietà II_3 e la proprietà II_5. (Ad es.: Acta Math. vol. II, pag. 381 e seg. Vedi anche Zeits. für Phil. v. Fichte Vol. 91 fas. 1, 1887, e Stolz: Math. Ann. vol. 31, pag. 608). I nostri numeri interi infiniti soddisfano a questa condizione, ma non è nostro scopo di far conoscere qui le proprietà di questi numeri che allargano il campo del continuo astratto. Nel nostro libro, che sta ora sotto stampa, questi numeri saranno trattati ampiamente per l'applicazione del continuo assoluto alla geometria stessa. Vedi nota pag. 5.

che sia $(XX') > (BC)$ (def. VI, 3). Da (1) si ricava che se (AX_1) è uno stato di (AX) (def. I, 4) ogni stato della variabile (AX') è maggiore di $(AX_1) + (X_1X_2)$, che è perciò uno stato di (AX) essendo $(X_1X_2) = (BC)$. Siccome la variabile (AX) non soddisfa che alla condizione di essere sempre minore di qualunque stato della variabile (AX'), ne consegue che considerato uno stato $(AX_1) + (X_1X_2) = (AX_2)$ della prima variabile, poichè la (1) ha sempre luogo per ipotesi fra due stati qualunque di (AX) e (AX'), l'intervallo $(AX_2) + (X_1X_2)n = (AX_n)$ qualunque sia n è pure uno stato della variabile (AX). Ma se (AX_1') è uno stato determinato della variabile (AX'), vi è sempre un numero n tale che $(X_1X_2)n > (X_1X_1')$ (V, oss. IV, 4), e perciò se fosse vera la (1) vi sarebbe uno stato di (AX) maggiore di uno stato di (AX'), il che è contrario ai dati del teorema. Dunque la (1) è assurda.

Un'analoga dimostrazione serve nel caso che (AX) sia crescente (e perciò anche limitatamente crescente, def. II, 4) e (AX') sia sempre decrescente.

b) *Un intervallo (AX_n) variabile sempre crescente (o decrescente) contenuto in un intervallo (AB) ha sempre uno ed un solo intervallo limite più grande (più piccolo) di tutti gli stati della variabile.*

Se (AB) è il primo intervallo nel verso del sistema Σ maggiore di ogni stato della variabile, (AB) è intervallo limite di (AX), perchè ciò significa che (XB) deve diventare indefinitamente piccolo (def. IV e III, 4). Difatti scelto nell'intervallo (AB) un intervallo $(B'B)$ arbitrariamente piccolo (a, 4; II$'_1$, def. VI, 3), se in esso non cadessero elementi X_n, il primo intervallo maggiore di tutti gli stati della variabile (AX_n) sarebbe almeno (AB') e non (AB).

Se (AB) non è intervallo limite di (AX) vi sono in (AB) altri intervalli (AB'), (AB''),... tali che $(AB) > (AB') > (AB'') > ...$ maggiori di (AX_n) qualunque sia n. Questi intervalli si possono considerare come stati di un intervallo decrescente maggiore degli stati di (AX_n) (def. I e II, 4), e quindi vi deve essere uno ed un solo intervallo (AY) limite delle due serie (a; l, def. IV, 4). In tal caso (AY) appartiene alla serie decrescente perchè questa è costituita da tutti i segmenti compresi in (AB) maggiori di tutti gli stati di (AX).

Un analogo ragionamento vale se (AX) è decrescente senza che X si avvicini indefinitamente ad A nel qual caso l'intervallo limite di (AX) sarebbe nullo (f', 2 e def. II, 3).

c) *Se l'intervallo (X_1X_1') o $(X_1'X_1)$ dato da due intervalli (AX_1), (AX_1') diventa indefinitamente piccolo, l'intervallo dato dai secondi estremi dei multipli di (AX_1) e (AX_1') secondo lo stesso numero n diventa pure indefinitamente piccolo. E inversamente.*

Sia $(AX_1') > AX_1$, si ha:

(1) $$(AX_1')n > (AX_1)n \quad (u, 2;\ \text{def. II, 3})$$

e indicando con X_n e X_n' i secondi estremi di questi multipli si ha:

$$(AX_n') > (AX_n)$$

in modo dunque che X_n cade nell'intervallo (AX_n') (def. II, 3; m', I$_{1'}$, 2 e def. IV, 3). Dato un intervallo (AC) qualunque, il suo multiplo secondo un numero dato in Σ è determinato ed unico (def. II, 3; def. III, e u', 2). Si vien dunque così a stabilire una corrispondenza univoca e del medesimo ordine fra gli elementi X_1 e gli

elementi X_n, perchè ad ogni elemento X_1 a partire da A corrisponde un solo elemento X_n, e viceversa ad uno di questi elementi non può corrispondere che un solo elemento X_1. Se ne corrispondesse un altro X_1' si dovrebbe avere $(AX_1')\,n = (AX_1)\,n$, da cui $(AX_1') = (AX_1)$ (def. II, 3; u', 2), dunque X_1' deve coincidere con X_1 (def. V, 2). La corrispondenza è anche del medesimo ordine perchè se si ha $(AX_1') < (AX_1) < (AX_1'')$ per la (1) si ha pure $(AX_n') < (AX_n) < (AX_n'')$, vale a dire se X_1 è compreso fra X_1' e X_1'', X_n è compreso fra X_n' e X_n'' (def. II, 3; m', $I_{1'}$, 2 e def. IV, 3). Se dunque (AX_1) è uno stato della variabile (AX) e se (X_1X_1') decresce, decresce pure (X_nX_n') (b, 3) e quando (X_1X_1') diventa indefinitamente piccolo, (X_nX_n') ha un intervallo limite (X_nY), supposto che X_1, e perciò anche X_n, sia costante (b e def. I, 4).

Dimostreremo che Y coincide con X_n (def. V, 3).

Supponiamo dapprima $n = 2$, e sia $(AX_1') > (AX_1)$.

Sia:

$$(X_1'X_2'') = (AX_1) = (X_1X_2),\ (AX_1') = (X_1'X_2')\ (\text{II}'_1) \qquad (2)$$

siccome
$$(AX_2) = (AX_1) + (X_1X_2),\ (AX_2'') = (AX_1') + (X_1'X_2''), \qquad (3)$$

$$(AX_2') = (AX_1') + (X_1'X_2')\ (c, 3)$$

si ha
$$(AX_2) < (AX_2'') < (AX_2') \qquad (4)$$

perchè

$$(AX_1') > (AX_1),\ (X_1'X_2'') = (X_1X_2) < (X_1'X_2')\ (\text{def. II, 3; } I_{1'},\ I_3;\ d, \text{ e } c, 2).$$

A X_1 X_2

X_1' L X_2'' X_2'

Così si stabilisce una corrispondenza univoca e del medesimo ordine fra gli elementi X_1' e X_2'', e quindi anche fra gli elementi X_2'' e X_2' (1). Difatti come ad ogni elemento X_1' corrisponde un solo elemento X_2'' (II'_1), così ad ogni elemento X_2'' non può corrispondere che il solo elemento X_1', perchè vi è un solo intervallo $(X_1'X_2'')$ uguale all'intervallo (AX_1) e in modo che X_2'' sia secondo estremo (oss. VIII, 3; (4), (3) b, r, 2; II_3). Se un elemento precede X_1' l'elemento corrispondente deve precedere X_2'', essendo l'intervallo di due elementi corrispondenti qualunque uguale ad (AX_1) (b, 3), dunque la corrispondenza è anche del medesimo ordine. Ora se (X_1X_1') diventa indefinitamente piccolo tale diventa pure (X_2X_2''), perchè altrimenti (X_2X_2'') avrebbe un intervallo limite (X_2L) (b), e quindi scelto un elemento Z fra X_2 e L (a, 4) e considerando l'intervallo $(WZ) = (X_1X_2)$ (oss. VIII, 3; II_3 (3); b, r, 2) l'elemento W non potrebbe essere interno al segmento (X_1X_2) (def. VII, 2), pei punti del quale gli elementi corrispondenti X_2'' sono esterni al segmento (X_2L). Dunque l'intervallo (X_1X_2) sarebbe parte dell'intervallo (WZ) (def. VI, 3) il che è assurdo (b, def. II, 3; II_1); dunque L deve coincidere con X_2 (def. V, 3).

Ora si ha:

$$(AX_1) + (X_1X_1') = (AX_1'),\ (X_1'X_2'') + (X_2''X_2') = (X_1'X_2')\ (c, 3)$$

e per le (2) si ha:

$$(X_1X_1') = (X_2''X_2')\quad (\text{II}_6,\ g, 2).$$

Se dunque (X_1X_1') diventa indefinitamente piccolo tale diventa anche $(X_2''X_2')$

(1) Vedi 3ª nota pag. 8.

(def. III, 4; a, 1), ma come si è veduto diventa altresì indefinitamente piccolo l'intervallo (X_2X_2''), dunque anche (X_2X_2') (g, 4), ciò che era da dimostrare.

$$\begin{matrix} A & & W & X_1 & & L & X_2 \\ & X_1' & & & X_2' \; X_2'' & Z & \end{matrix}$$

Se fosse $(AX') < (AX_1)$ si avrebbe $(AX_2) > (AX_2') > (AX_2'')$ (u, II_6, d, 2), e se vi fosse un elemento L limite di X_2'' differente da X_2 l'intervallo $(WZ) = (X_1X_2)$ avrebbe l'elemento W nell'intervallo (AX_1) distinto da X_1 (b, 3), mentre per ogni elemento X_1' compreso in (WX_1) l'elemento corrispondente X_2'' dovrebbe essere contro l'ipotesi in (LX_2) (b, 3). Dunque L deve coincidere con X_2 (def. V, 3). In questo caso si ha:

$$(AX_1) - (X_1'X_1) = (AX_1'), \; (X_1'X_2'') - (X_2'X_2'') = (X_1'X_2')$$

da cui

$$(X_1'X_1) = (X_2'X_2'') \quad (\text{ind. I, II}_6,\ g\ 2);$$

e per conseguenza $(X_2'X_2'')$ diventa indefinitamente piccolo insieme con $(X_1'X_1)$, ma tale diventa anche $(X_2''X_2)$, quindi anche $(X_2'X_2)$ (g, 4).

Il teorema per $n = 2$ è dunque dimostrato.

Ora supponiamo che se X_1' si avvicina indefinitamente ad X_1, X_{n-1} si avvicini indefinitamente ad X_{n-1} (def. IV, 4). Dimostriamo che ciò ha luogo anche per gli elementi X_n e X_n'.

$$\begin{matrix} X_{n-2} & & X_{n-1} & & X_n & \\ & X'_{n-2} & & X'_{n-1} & & X_n'' \; X_n' \end{matrix}$$

Si ha $(AX_1) = (X_{n-2}\,X_{n-1}) = (X_{n-1}\,X_n)$, $(AX_1') = (X'_{n-2}\,X'_{n-1}) = (X'_{n-1}X_n')$ per dato, e nel caso $(AX_1) < (AX_1')$ si ha:

$$(X_{n-2}\,X_{n-1}) < (X'_{n-1}\,X'_n) \quad (\text{I}_{1'},\ a,\ 1) \tag{4}$$

Sia

$$(X'_{n-1}\,X_n'') = (X_{n-1}\,X_n) \tag{5}$$

per la (4) X_n'' è compreso nell' intervallo $(X'_{n-1}\,X'_n)$ (def. II, oss. II 3; m', $\text{I}_{1'}$, 2 e def. IV, 3), e poichè è $(AX'_{n-1}) > (AX_{n-1})$ (u, 2), X'_{n-1} è compreso per la stessa ragione fra X_{n-1} e X_n', e quindi per (5) e (4) X_n'' è compreso fra X_n e X_n'. Si dimostra come per $n=2$ che quando X'_{n-1} si avvicina indefinitamente a X_{n-1}, X_n'' si avvicina indefinitamente a X_n. Si ha inoltre:

$$(X_{n-2}\,X_{n-1}) + (X_{n-1}\,X'_{n-1}) = (X_{n-2}\,X'_{n-1})$$
$$(X'_{n-1}\,X_n'') + (X_n''\,X_n') = (X'_{n-1}\,X_n')$$

ma essendo $(AX_{n-2}) < (AX'_{n-2})$ ((4); $\text{I}_{1'}$, u, 2; def. II, 3) e $(AX'_{n-2}) < (AX'_{n-1})$ (b, 3); si ha $(X_{n-2}\,X'_{n-1}) > (X'_{n-2}\,X'_{n-1}) = (X'_{n-1}\,X_n')$ (def. II, oss. II, 3; m', 2; oss. IV e b, 3) dunque $(X_{n-1}\,X'_{n-1}) > (X_n''\,X_n')$ ((5); def. II, oss. II, 3 e c', 2).

Se $(X_{n-1}\,X'_{n-1})$ diventa indefinitamente piccolo a maggior ragione lo diventa $(X_n''\,X_n')$ (def. III, 4 e r', 2), dunque anche (X_nX_n') (g, 4).

Se $(AX_1') < (AX_1)$ si ha $(AX'_{n-1}) < AX_{n-1})$ (def. II, 3, u, 2). Si può fare accostare X'_{n-1} a X_{n-1} in modo che X_n'' cada fra $X_{n-1}\,X_n$, basta che sia $(X'_{n-1}\,X_{n-1}) < (X_{n-1}\,X_n)$ (oss. VIII, 3); e poichè $(X'_{n-1}\,X_n) > (X'_{n-1}\,X_n'')$ (b, 3), $(X'_{n-1}\,X_n') < (X'_{n-1}\,X_n'')$ per costruzione, l'elemento X_n'' è compreso fra X_n' e X_n (def. II, oss. II, 3; m', 2°, $\text{I}_{1'}$; def. IV e oss. IV, 3); e l'elemento X'_{n-1} è compreso

fra X_{n-2} e X_{n-1} essendo $(X_{n-2}\,X_{n-1}) = (X'_{n-1}\,X_n'')$ (b, 3). E come prima si dimostra che X_n'' ha per elemento limite X_n quando X'_{n-1} ha per elemento limite X_{n-1} (def. IV, 4).

$$\begin{array}{ccccc} & X_{n-1} & & X_n & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ X'_{n-1} & & X_n' \quad X_n'' & & \end{array}$$

Ora si ha $(X_{n-2}\,X_{n-1}) - (X'_{n-1}\,X_{n-1}) = (X_{n-2}\,X'_{n-1})$, $(X'_{n-1}\,X_n'') - (X_n'\,X_n'') = (X'_{n-1}\,X_n'')$; ma $(X_{n-2}\,X'_{n-1}) < (X'_{n-2}\,X'_{n-1}) = (X'_{n-1}\,X_n') < (X'_{n-1}\,X''_n)$, essendo per ipotesi $(AX_{n-2}) > (AX'_{n-2})$ (u, 2; b, 3), e $(X_{n-2}X_{n-1}) = (X'_{n-1}X_n'')$; dunque $(X'_{n-1}X_{n-1}) > (X_n'X_n'')$ (def. II, oss. II, 3; ind. I e t', 2), e perciò $(X_n'X_n'')$ diventa indefinitamente piccolo con $(X'_{n-1}\,X_{n-1})$, e quindi anche $(X_n'\,X_n)$ (g, 4).

Dunque se il teorema è vero per $n-1$ è vero per n, ma vale per $n-1=2$, dunque vale per n qualunque.

Se si suppone finalmente che $X_1\,X_1'$ siano tutti e due variabili in verso opposto o nello stesso verso di modo che $(X_1\,X_1')$ (o $(X_1'X_1)$) diventa indefinitamente piccolo, (X_1X_1') (o $(X_1'\,X_1)$) determina un elemento limite Y_1 (IV, i, 4, o b). Ma quando (X_1X_1') diventa indefinitamente piccolo tale diventano anche $(X_1\,Y_1)$ e (Y_1X_1') ovvero $(X_1'\,Y_1)$ e (Y_1X_1) nel primo caso; nel secondo $(X_1'\,Y_1)$ e $(X_1\,Y_1)$, oppure (Y_1X_1') e (Y_1X_1); e inversamente (def. III o h, 3). Dunque per le dimostrazioni precedenti diventano indefinitamente piccoli $(X_n\,Y_n)$, $(Y_n\,X_n')$ o $(X_n'\,Y_n)$, (Y_nX_n) nel primo caso, e nel secondo $(X_n'\,Y_n)$, $(X_n\,Y_n)$ oppure $(Y_n\,X_n')$ e $(Y_n\,X_n)$ quando diventa tale anche (X_1X_1') o $(X_1'\,X_1)$, e perciò anche $(X_n\,X_n')$ o $(X_n'\,X_n)$ (i, h, 4).

La prima parte del teorema è dunque dimostrata.

Inversamente se $(X_n\,X_n')$ o $(X_n'\,X_n)$ ha un elemento limite Y_n, l'intervallo (AX) ha un l'intervallo limite (AY) (u', 2 e b); e per la prima parte del teorema si deve avere $(AY)\,n = (AY_n)$ (1).

d) *Ogni intervallo* (AB) *può essere diviso in un solo modo in un numero* n *qualunque di parti uguali.*

Vi sono intervalli (AX) i cui multipli secondo n sono più piccoli di (AB) (d, 4). Sia dunque:

$$(AX_1^{(1)})\,n = (AX_n^{(1)}) < (AB). \tag{1}$$

Ora se in ogni intervallo dato $(B'B)$ contenuto nell'intervallo $(X_n^{(1)}B)$ (def. VI, oss. VIII, 3) non vi fossero altri elementi X_n, siccome vi sono elementi X_n' tali che $(AX'_n) > (AB)$ (d, 4), $(X_n^{(1)}\,X_n')$ non diverrebbe indefinitamente piccolo con $(X_1^{(1)}\,X'_1)$ contro il teor. precedente, essendo X compreso fra $X^{(1)}$ e B (def. III, 4). Dunque la variabile (AX_n) ha per limite (AB) (def. III, 4), e la variabile (AX_1) ha per limite l'intervallo (AY) (u', 2 e b) tale che $(AY)\,n = (AB)$ (c e b) (2).

(1) La dimostrazione di questo teorema è lunga ma in compenso è semplice e intuitiva. Questa proprietà è fondamentale per quelle che seguono, che sono pure a loro volta proprietà fondamentali del continuo.

(2) La dimostrazione di questo teorema data dal sig. Stolz (l. c.) senza bisogno del teor. c) si appoggia sull'assioma della legge commutativa della somma di due intervalli qualunque (vedi nota pag. 2) che si può e quindi si deve dimostrare.

Dopo che avevo già scritto questa nota ricevetti la bella *Teoria dei gruppi geometrici* nello spazio a tre dimensioni del mio ch.mo amico De Paolis (Mem. della R. Acc. di Napoli 1890)

e) *Se (AA') è la n^{ma} parte e (AA'') la n'^{ma} parte di un segmento qualunque (AB) $(n' > n)$ (AA'') è più piccola di (AA'), e se n aumenta indefinitamente* (1) *(AA') diventa indefinitamente piccola.*

Se fosse $(AA') = (AA'')$, essendo per dato $(AA')n = (AA'')n' = (AB)$ (I_3), sarebbe $(AA')n' = (AB)$ (def. II, 3, u, 2 e I_2) e perciò anche $n = n'$ (u, 2, I_1; oss. V, 3). Se invece fosse $(AA') < (AA'')$ sarebbe pure $(AA')n < (AA'')n$ (u, 2, oss. V, 3), ma per dato è $(AA'')n' = (AA')n = (AB)$, dunque sarebbe $(AA'')n' < (AA'')n$ (I_3), mentre d'altra parte deve essere per dato $(AA'')n' > (AA'')n$ (u, 2); dunque è assurdo che $(AA') \leqq (AA'')$ (I_1). Quindi quando n aumenta (AA') diminuisce.

Se è dato un segmento (AE) per quanto piccolo, si ha:

$$(AE)m < (AA') < (AE)(m+1) \quad (m, 4).$$

Dividendo dunque (AA') in $m+1$ parti uguali (d) si ha $(AA')\frac{1}{m+1} < (AE)$ (def. III, u', 2). Ma $(AA')\frac{1}{m+1} = \frac{(AB)}{n(m+1)}$ (e, 2), dunque il teor. è dimostrato.

Oss. I. Osserviamo che questo teorema è indipendente dall'ipotesi del limite (IV), qualora si ammetta però la divisione di *ogni* intervallo o grandezza in un numero qualsiasi di parti uguali, ipotesi che come si vede è più complessa di quella del limite, poichè si ammette la divisibilità per *ogni* numero n.

e') *Se si divide un intervallo (AB) qualunque in n $(n \geqq 2)$ parti uguali e queste ancora in n parti uguali e così via, esse divengono indefinitamente piccole.*

Difatti si ottengono le parti $\frac{(AB)}{n}, \frac{(AB)}{n^2}, \ldots \frac{(AB)}{n^r}$ (e, 2); e col crescere indefinito di r, n^r diventa più grande di ogni numero intero dato m (oss. I, 2), dunque ecc. (e).

6. Oss. I. Abbiamo visto che il sistema Σ primitivo di grandezze può essere considerato come una serie di elementi con un primo elemento O, e nella quale un elemento appare una volta soltanto, come le grandezze corrispondenti (oss. IV, 2). Abbiamo anche visto che a cominciare da un elemento dato e qualunque del sistema si può immaginare nell'ordine o verso del sistema un intervallo uguale a un intervallo dato qualunque (II_1'). Cominciando la serie dall'elemento O non vi è alcun intervallo che

---

nella quale egli suppone però noti i fondamenti della geometria per lo spazio a tre dimensioni (pag. 7). De Paolis dà del teor. d) una dimostrazione (pag. 15-16) colla quale sembra si possa evitare il teor. c) ed anche l'assioma della legge commutativa della somma di due segmenti; ma quella dimostrazione non è completa, e, come mi scrisse gentilmente l'autore, essa suppone questo assioma. De Paolis nei suoi *Elementi di Geometria* dà l'assioma d'Archimede per i segmenti rettilinei verso la fine (ass. X), e nella suddetta Memoria lo dà nuovamente per la retta col postulato di Dedekind (pag. 14) e in generale per un gruppo continuo qualunque di punti nella definizione del gruppo ben concatenato (pag. 28) seguendo la definizione del gruppo continuo di G. Cantor (ad es. *Acta Math.*, vol. II, 402-406). Questi ammette però come conosciuto il continuo numerico ordinario, che soddisfa all'assioma d'Archimede, e definisce come distanza di due elementi della varietà numerica $(X_1, X_2 \ldots X_n)$, ove trovasi il gruppo, la espressione $\sqrt{(X'_1 - X_1)^2 + \ldots + (X'_n - X_n)^2}$, facendo così dipendere la definizione del gruppo continuo dalle n dimensioni della varietà, sebbene n sia un numero intero finito dato qualunque.

(1) Ciò significa che n diventa più grande di ogni numero intero finito dato (vedi def. III, 4).

abbia per secondo estremo l'elemento O. Per dare più generalità ai nostri teoremi che seguono, *supporremo che il sistema Σ non abbia un primo elemento*, come non ha un ultimo elemento (v, 2 e oss. IV, 3); o in altri termini che esista sempre un intervallo uguale a un intervallo dato qualunque di Σ, sempre nel verso di esso (def. I, 3), il cui secondo estremo sia l'elemento O. Si deduce facilmente che questa proprietà vale per ogni altro elemento del sistema (II_1' e oss. VIII, 3).

Oss. II. E sempre per dar maggiore generalità ai nostri teoremi terremo anche conto delle relazioni di posizione che sono possibili fra gli elementi del sistema, in modo che nella semplice unione di una grandezza ad un altra non si possa più sostituire una grandezza con un altra ad essa uguale, mentre relativamente ai segni $>, =, <$ si può sostituire nella somma $(AB) + (CD)$, o in ogni altra che deriva dalla somma, ad (AB) o (CD) un intervallo uguale (oss. III, 3).

Def. I. In questo caso una parte di Σ (def. II, 3) la chiameremo *segmento*.

Oss. III. Rimangono inalterate per i segmenti le relazioni del principio I e del principio II tranne la II_6 che vale in generale soltanto pei segmenti consecutivi (def. VIII, 3) (1).

La retta considerata in una delle sue direzioni (come anche ad es: il cerchio) ci dà un' immagine di questo sistema. Solamente bisogna osservare che la retta (ed anche il cerchio) ha ancora un'altra proprietà fondamentale che la caratterizza in confronto del sistema Σ, e cioè che da un suo punto A vi sono due segmenti (AB), (AC) di verso opposto (def. IX, 2) uguali fra loro; proprietà che noi daremo nel principio VI. La forma intuitiva del tempo ci dà meglio l' idea del sistema Σ.

Oss. IV. Noi vediamo che l'intervallo considerato dapprima e il segmento non sono la stessa cosa; imperocchè il segmento (AB), se lo supponiamo composto di segmenti consecutivi (AA_1), (A_1A_2)...(AB) (c, 4) *dipende dalle relazioni di posizione di questi segmenti fra loro* (oss. II), mentre l'intervallo considerato precedentemente non dipende da queste relazioni, vale a dire l'intervallo ad es: $(AC) = (AB) + (BC)$ non muta se al posto di (AB) e (BC) sostituiamo altri intervalli qualunque uguali ad essi (oss. III, 3).

Def. II. Quando non si considerano le relazioni di posizione tra le parti di un segmento, tranne s'intende l'ordine in cui si seguono poichè da questo dipende finora almeno anche l'intervallo, l'intervallo che così si ottiene si chiama *grandezza intensiva* del segmento (2).

Oss. V. La prima ipotesi (oss. I) ci dà più generalità ma non aggiunge nulla per la dimostrazione dei teoremi seguenti rispetto al primitivo sistema Σ, perchè se ne potrebbe far senza. L'altra condizione delle relazioni di posizione fra le parti di un segmento (oss. II) aggiunge piuttosto delle difficoltà che delle nuove ipotesi che

(1) Nel nostro libro partiamo da questo sistema per costruire il continuo, tenendo anche conto delle relazioni di posizione come carattere di confronto fra le forme matematiche astratte.

(2) Se si tratta di un segmento rettilineo si ha la *distanza* dei suoi estremi considerata sul segmento. È un errore confondere la distanza col segmento perchè sono enti diversi, come sarebbe un errore se si scambiasse l'area di una figura piana colla figura stessa. Questa distinzione sarà meglio e ampiamente discussa nei nostri studî più volte citati. Per lo scopo di questa nota basta questa indicazione (vedi oss. IV).

possano servire nascostamente alle dimostrazioni dei suddetti teoremi, le quali, come si vedrà, sono indipendenti da essa.

Def. III. Per *somma* di due segmenti (AB), $(B'C')$ intenderemo sempre il segmento $(AC) \equiv (AB) + (BC)$ (1) essendo $(BC) \equiv (B'C')$.

Qui, perchè nell'uguaglianza dei gruppi di segmenti abbiamo ancora da considerare le relazioni di posizione fra i segmenti di uno stesso gruppo addottiamo il segno $\equiv$ in luogo del segno $=$, che riserviamo per le grandezze intensive.

Oss. VI. E per dare ancora maggiore generalità alle nostre ricerche daremo alla parola *somma* un significato più esteso, supponendo che nel simbolo $(AB) + (BC)$ che indica la somma di (BC) ad (AB) il segmento (BC) possa essere anche di verso opposto ad (AB), o in altre parole che C sia compreso in (AB), o A sia compreso in (CB).

Da qui si deduce ad es:

$$(AB) + (BA) \equiv 0 \qquad (2)$$

ma ciò non significa che sia $(AB) \equiv (BA)$, perchè la (2) sostituisce l' altra $(AB) - (AB) \equiv 0$.

a) $$(AB) + (BC) \equiv (BC) + (AB)$$

nel senso che nel secondo membro dell'uguaglianza da C si considera un segmento uguale ad (AB).

Supponiamo dapprima che (AB) e (BC) siano dello stesso verso.

1) Se (AB) e (BC) sono multipli rispettivamento secondo i numeri m e n di uno stesso segmento (AA'), e si decompongono (AB) e (BC) nelle loro m, rispettivamente n, parti uguali ad (AA'), possiamo considerarne dapprima n e poi le rimanenti m per la legge commutativa della somma dei numeri della classe 1 2 3... n... senza alterare quindi il risultato (AC) (oss. III, 2). Ma n e m segmenti consecutivi uguali ad (AA') dànno rispettivamente due segmenti uguali a (BC) e ad (AB) (def. III, u, 2 e I_3); dunque in tal caso il teorema è dimostrato.

2) Supponiamo che (AB) e (AC) non siano nella suddetta condizione:

$$Y' \; C \; C' \; X' \; B' \quad A \quad B \; X \; C \; Y$$

Consideriamo nel verso del sistema Σ i segmenti:

(1) $$(B'A) \equiv (AB)\,,\; (C'B') \equiv (BC) \quad \text{(oss. I).}$$

L'elemento B' è contenuto per costruzione in $(C'A) \equiv (C'B') + (B'A)$ (c, 3). Si scomponga (AB) in n parti uguali (d, 5), e una di esse sia (AA'), che per n abbastanza grande sarà minore di (BC) (e, 5). Vi è un numero $m > n$ tale che

(2) $$(AA')\, m < (AC) < (AA')\,(m+1) \quad (m,\, 4).$$

L'elemento C sarà compreso dunque nella parte $(m+1)^{ma}$ (def. IV e def. II, 3), che indicheremo con (XY), e X sarà compreso in (BC), essendo per costruzione $(AX) > (AB)$. Si consideri

(3) $$(Y'A) \equiv (AY) \qquad (X'A) \equiv (AX) \qquad \text{(oss. I).}$$

L'elemento X è compreso nel segmento (AY) e quindi X' nel segmento $(Y'A)$, essendo $(AX) < (AY)$, e quindi anche $(X'A) < (Y'A)$ ($I_{1'}$, a, 1, I_3).

Si ha pure pel caso 1) e per la (1) e II_6 (oss. III) che

(4) $$(Y'B') \equiv (BY) \qquad (X'B') \equiv (BX)\,.$$

Ora (BY) è maggiore di (BC) per costruzione, e quindi anche $(Y'B')$ è maggiore

di $(C'B')$; ((1), (4) e I_3, $I_{1'}$). Così per la stessa ragione $(X'B')$ è minore di $(C'B')$; dunque l'elemento C' è compreso fra gli elementi Y' e X' (def. IV, 3). Si ha:

(5) $$(Y'X') \equiv (XY)$$

perchè pel caso 1)

$$(Y'X') + (X'A) \equiv (Y'A) \equiv (X'A) + (Y'X')$$

e $$(AX) + (XY) \equiv (AY) \quad (c, 3; (3); II_6, \text{oss. III}; g, 2).$$

Se C_1' è un elemento tale che

(6) $$(AC) \equiv (C_1'A)$$

siccome (AC) è maggiore di (AX) e minore di (AY) ((2)), $(C_1'A)$ deve essere maggiore di $(X'A)$ e minore di $(Y'A)$ ((6), (3), I_3), e quindi C_1' è pure compreso nel segmento $(Y'X')$ (def. IV, 3).

Se il numero n cresce indefinitamente (XY), e quindi anche $(Y'X')$ ((5)), diventa indefinitamente piccolo (e, 5). Siccome $(Y'X')$ diventa indefinitamente piccolo e C' e C_1' sono sempre compresi in questo segmento essi devono coincidere (b, 4). Si deve dunque avere:

$$(C'B') + (B'A) \equiv (C'A) \equiv (AC),$$

ossia

$$(BC) + (AB) \equiv (AC) \text{ nel senso suindicato ((1), oss. III).}$$

3) Supponiamo ora il caso che (AB) e (BC) siano di verso opposto, considerandoli però sempre nel risultato nel verso di Σ, che supponiamo sia dato da (AB).

Il teorema dice che se si considera prima il segmento $(B'A) \equiv (CB)$ e poi il segmento $(B'A') \equiv (AB)$, si ha: $(AA') \equiv (AC)$

B' A C B

Se $(CB) < (AB)$, $(B'A)$, (AC), (AB) sono del medesimo verso (def. I, II, 3), e per la dimostrazione precedente si ha:

$$(B'C) \equiv (AB) \equiv (B'A') \quad (II_6, \text{oss. III}).$$

Ma vi è un solo segmento uguale ad un segmento dato col primo estremo in un elemento dato qualunque del sistema (II_1'; oss. I), dunque C e A' coincidono (def. V, 3), ossia $(AA') \equiv (AC)$.

Se invece $(CB) > (AB)$, (CA) ed (AB) sono dello stesso verso (def. I e def. II, 3)

C A A' B

e quindi considerando un segmento $(CA') \equiv (AB)$ si ha pel caso 2)

$$(CA) \equiv (A'B)$$

ossia $$(AB) + (BC) \equiv (BC) + (AB).$$

Il teorema è dunque pienamente dimostrato [1].

Oss. VII. La dimostrazione di questo teorema è indipendente dall'ipotesi del limite (IV), perchè $(X'Y')$ contiene già gli elementi costanti C' e C_1'. Bisogna però ammettere la divisibilità di ogni segmento in un numero qualsiasi n di parti uguali,

[1] Euclide suppone tacitamente questa proprietà ad es: nella prop. II del libro V, ammette cioè:

$$(\text{E} + \text{E}) + (\text{Z} + \text{Z}) \equiv \text{E} + \text{Z} + \text{E} + \text{Z}$$

(Euclidis Elementa. Ed. Heiberg, 1889).

proprietà codesta che, sebbene più complessa, non include ancora il principio IV, ma che viene dimostrata per mezzo di esso (d, 5) (¹).

7. Oss. I. Considerando il sistema Σ e il suo opposto Σ' (def. IX, 3) coi principî precedenti non possiamo dir nulla intorno al confronto dei segmenti o intervalli di Σ e Σ', ossia non sappiamo se ad un segmento di Σ sia uguale un segmento di Σ'. Riguardando Σ e Σ' come un solo sistema, che indicheremo ancora con Σ, e quindi anche come un solo segmento il segmento (AB) di Σ e il segmento (BA) di Σ' (oss. VI, 3), non possiamo dire se due segmenti, che nel nuovo sistema Σ sono di verso opposto, siano uguali. Si ha però:

a) *Se* $(AB) \equiv (CD)$ *si ha* $(BA) \equiv (DC)$.

Perchè è la stessa operazione a senso unico che noi eseguiamo sui due segmenti considerandoli in verso opposto (def. IX, 3); e la stessa operazione a senso unico eseguita in cose identiche dà risultati identici (²).

a') *Un sistema* Σ *omogeneo in un verso è omogeneo anche nel verso opposto* (oss. I; II_1', oss. I, 6 e a).

Princ. VI. Nel sistema Σ vi sono due segmenti $(B'A)$,(AB) di verso opposto uguali fra loro.

Def. I. Chiamiamo il sistema Σ che soddisfa ai principi I-VI *sistema continuo ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti* (³).

b) *Dato un elemento qualunque* X *di* Σ *vi sono due segmenti di verso opposto coll'estremo comune* X *uguali ad un segmento qualunque dato di* Σ.

Sia (YZ) il segmento dato. Dimostriamo dapprima il teorema per l'elemento A (VI). Nel verso di Σ dato da (YZ) (def. II, 3) vi è in Σ un solo segmento (AC) uguale a (YZ) col primo estremo in A (II'_1 e a'). Se si ha $(AC) \equiv (AB)$ il teorema è il principio VI stesso.

Se $(AC) < (AB)$ per la corrispondenza d'indentità fra (AB) e (AB') (⁴) vi deve essere un elemento C' corrispondente a C in modo che $(AC') \equiv (AC)$. Tale proprietà vale anche per l'elemento X, perchè dato un segmento col primo estremo A in un dato verso vi è un segmento uguale al dato col primo estremo X nel verso dato (II'_1 e a').

(¹) Ad es: il sistema dei numeri razionali soddisfa a questa condizione. Ciò dimostra come non sia conveniente, specialmente in geometria, di definire il continuo mediante il continuo numerico, se si tien conto oltre che di altre ragioni (vedi nota (1) pag. 670), della semplicità dei principî ammessi, e che il continuo numerico è un caso particolare di una forma più generale (vedi oss. I, 605 e III, 608).

(²) Questo è un principio di logica che deriva da quello d'identità (come si vedrà nel nostro libro) del quale bisogna però far uso in casi come questo nei quali non vi può esser dubbio sull'identità delle condizioni che determinano questi risultati, e quando non si può dare un'altra dimostrazione per mezzo dei principî ammessi, come in questo caso.

(³) Avremmo scelto volentieri una denominazione più breve, non potendo usare la parola *omogeneo*. Abbiamo scelto quindi un' espressione analoga a quella usata da Euclide nella definizione della retta. In un trattato di geometria elementare, poichè non si presentano in essa sistemi omogenei che non siano anche identici nella posizione delle loro parti, si può usare la sola parola *omogeneo*.

(⁴) Qui ci appoggiamo senz'altro al principio della corrispondenza d'identità fra gli elementi di due gruppi identici, che si trova discusso nel nostro citato lavoro, e col quale possiamo escludere il principio del movimento dei corpi senza deformazione dai principî della geometria teoretica. Qui l'esclusione è evidente trattandosi di forme o grandezze puramente astratte (vedi nota (2) pag. 670).

Se invece $(AC) > (AB)$ vi deve essere un numero m tale che

$$(AB)\, m < (AC) < (AB)\,(m+1) \quad (m, 4).$$

Indichiamo con B_m e B_{m+1} i secondi estremi di $(AB)m$, $(AB)(m+1)$ e con B'_m B'_{m+1} i secondi estremi di $(AB')\,m$, $(AB')\,(m+1)$ (VI; a' e II'_1). Si ha:

$$(AB)\, m \equiv (AB')\, m,\ (AB)\,(m+1) \equiv (AB')\,(m+1) \ (\text{VI}; u, 2).$$

Sia $(B'_m C') \equiv (B_m C)$ nel segmento $(B'_m B'_{m+1})$ considerando B_m come elemento X, il che è possibile essendo $(B_m C) < (B_m B_{m+1}) \equiv (AB)$. Ma si ha: $(AB_m) + (B_m C) \equiv (AC)$, $(AB'_m) + (B'_m C') \equiv (AC')$, da cui, essendo $(AB_m) \equiv (AB'_m)$, $(B_m C) \equiv (B'_m C')$, si ha $(AC) \equiv (AC')$ (II_6, oss. III, 6 e I_2).

Il teorema è dimostrato per l'elemento A. E con una considerazione identica alla precedente per l'elemento X, il teorema resta dimostrato per ogni elemento dato (1).

c) $(AB) \equiv (BA)$.

1. Dimostriamo dapprima che se $(AB) \equiv (AB')$ si ha:

$$(BB') \equiv (B'B)$$

. . . .

B B_1 A B_1' B'

I segmenti (AB) e (AB') sono diretti in verso opposto, altrimenti B coinciderebbe con B' (def. V, 3 e II'_1), quindi $(B'A)$ e (AB) sono diretti nello stesso verso (def. I, def. IX, 3), ma non si sa se (AB) sia uguale a $(B'A)$ (oss. I). Si ha però:

$$(B'A) + (AB) \equiv (B'B) \ (c, 2).$$

Ma $(B'A) \equiv (BA)$ perchè per dato è $(AB) \equiv (AB')$ (a) (1)

Inoltre $(BA) + (AB') \equiv (BB') \equiv (B'A) + (AB)$ (II_6, oss. III, 6), dunque

$$(BB') \equiv (B'B) \qquad (2)$$

2) Supponiamo ora che (BA) non sia identico ad (AB), e sia identico ad un segmento (AB_1) nello stesso verso di (AB) (b), e quindi B_1 non coincida con B. L'elemento B_1 sia inoltre contenuto nel segmento (BA) (def. IV, 3). Vi è nel verso opposto di (AB) a partire da A nel sistema Σ un segmento

$$(AB'_1) \equiv (AB_1) \ (b) \qquad (3)$$

da cui

$$(B'_1 A) \equiv (B_1 A) \ (a)$$

e l'elemento B'_1 è contenuto in (AB') per l'identità dei segmenti (AB) e (AB'), (AB_1) e (AB'_1) (I_3, I_1). Inoltre da (2).

$$(B_1 B'_1) \equiv (B'_1 B_1) \qquad (4)$$

e per ipotesi

$$(BA) \equiv (AB_1) \qquad (5)$$

(1) Nei trattati elementari di geometria che conosciamo il principio II'_1 è ammesso con lo scorrimento della retta su sè stessa in un dato verso. Il teor. a', sostituisce lo scorrimento della retta nel verso opposto. Il principio VI è contenuto nell'assioma molto più complesso secondo il quale la retta rigida può ruotare intorno ad ogni suo punto e passare per ogni punto dello spazio. Il resto di questo assioma sulla retta viene sostituito dal teor. a). L'importante teor. c) è dato pure tacitamente o esplicitamente come assioma. Si noti inoltre che nelle nostre dimostrazioni non usciamo mai dalla retta, che è per noi la figura fondamentale della geometria, e che i nostri teoremi valgono per tutti quei sistemi continui geometrici ad una dimensione pei quali, mediante la loro costruzione, siano dimostrati i principî I-VI.

e poichè da (1) e (3) si ha

$$(B'A) \equiv (AB_1) \equiv (AB'_1) \quad (I_2) \tag{6}$$

ne segue:

$$(AB') \equiv (B_1 A) \equiv (B'_1 A) \quad (a) \tag{6'}$$

Ora è

$$(BA) + (AB') \equiv (BB') \equiv (AB_1) + (B'_1 A) \quad ((5), (6'), II_6, \text{ oss. III}, 6)$$

considerati i segmenti dell'ultimo membro come consecutivi. Ma

$$(AB_1) + (B'_1 A) \equiv (B'_1 A) + (AB_1) \equiv (B'_1 B_1) \quad (a, 6)$$

vale a dire

$$(BB') \equiv (B'_1 B_1) \quad (I_2). \tag{7}$$

Si ha pure:

$$(BB') \equiv (BB_1) + (B_1 B'_1) + (B'_1 B_1)$$

ossia per la (4)

$$(BB') \equiv (BB_1) + (B'_1 B_1) + (B'_1 B') \quad (\text{oss. III}, 6)$$

intendendo come abbiamo già detto che in luogo di $(B'_1 B_1)$ vi sia un segmento ad esso uguale e consecutivo di (BB_1), e così per $(B'_1 B')$ rispetto a $(B'_1 B_1)$. Vale a dire confrontando con la (7) si deve avere $(B'_1 B') \equiv 0$. Difatti se ciò non fosse sarebbe $(BB') \equiv [(BB_1) + (B'_1 B_1)] + (B'_1 B') > ((BB_1) + (B'_1 B_1)$ (II_2 e II_3), ed anche $(BB_1) + (B'_1 B_1) > (B'_1 B_1)$ (II_3), ossia $(BB') > (B'_1 B_1)$ $(r, 1)$, il che è assurdo ((7) e I_1). Dunque si ha anche $(BB_1) \equiv 0$, vale a dire B e B_1, B'_1 e B'_1 coincidono (II'_1), e perciò $(AB) \equiv (BA)$.

Se invece B è contenuto nel segmento (AB_1), per l'identità dei segmenti (AB) e (AB'), (AB_1) e (AB'_1) si cade nel caso precedente. Dunque il teorema è in ogni caso dimostrato.

Oss. II. In questo teorema come nel teor. a) del n. 6 non ci serviamo dell'ipotesi del limite (IV) se ammettiamo però la divisibilità di ogni segmento in un numero n qualunque di parti uguali da cui allora dipende il teor. a), 6 (vedi oss. VII, 6).

Oss. III. Si potrebbero dedurre facilmente dal teor. a del n. 6 e dai principî precedenti altri teoremi fondamentali pel sistema omogeneo continuo ad una dimensione. Soltanto ci limitiamo ad osservare che il continuo numerico non è necessario per chiarire la continuità, ma è dal continuo omogeneo in generale che deduciamo quello particolare dei numeri reali, sia positivi che negativi, come il numero intero naturale deriva dal gruppo ordinato naturale, come si vedrà nell'introduzione delle nostre ricerche sui fondamenti della geometria.



INDICE DEL VOL. VI — SERIE 4.ª

Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.